数理解析研究所講究録
306巻 1977年 28-35

(Z,λ)-核型写像とZ-核型空間

島大 文理　城市篤夫

PerssonとPietschはバナッハ空間の間の古典的な核型写像，擬核型写像を発展させて，バナッハ空間におけるp-核型写像，p-擬核型写像の概念を導入し，その理論を展開した。これは最近宮崎氏によって点列空間$l_{p,q}$を使って(p,q)-核型写像，(p,q)-擬核型写像の概念に拡張された。一方これはまたCeitlinによって(Z,p)-核型写像，(Z,p)-擬核型写像の概念に拡張された。ここではこれ等二種類の概念を抽象点列空間λを使って(Z,λ)-核型写像，(Z,λ)-擬核型写像の概念に拡張する。ここで$1 \leq p \leq \infty$，$1 \leq q < \infty$で$\lambda = l_{p,q}$，Zが1次元ならば(Z,λ)-核型写像は宮崎氏の導入した(p,q)-核型写像と一致し，$\lambda = l_p$ならば(Z,λ)-核型写像はCeitlinによって導入された(Z,p)-核型写像と一致する。また我々はCeitlinによって導入された(Z,l_1)-核型写像を使って核型空間の概念をZ-核型空間に拡張し，核型空間とバナッハ空間Z

とのテンソル積はE−核型空間となることを示す。

オ1節においてはまずC_0上に拡張された擬ノルムpが与えられたとする。そのとき$\lambda \subset C_0$を$\lambda = \{x \in C_0 \mid p(x) < \infty\}$で定義し、pを$\|\cdot\|_\lambda$で表わす。この$\lambda$は零でない空間で次の条件をみたすものとする

(a) 任意の$u = (u_1, \cdots, u_n, \cdots) \in \lambda$に対して$u^i = (u_1, \cdots, u_i, 0, \cdots)$ $(i=1,2,\cdots)$とおけば、$i \to \infty$のとき$\|u - u^i\|_\lambda \to 0$。

(b) $\|\cdot\|_\lambda$は絶対的単調である。

(c) λはK−対称である。

(d) 任意の$u = (u_1, \cdots, u_n, \cdots) \in \lambda$に対して、$v$を$i \neq i_n$ $(n=1,2,\cdots)$のとき$u_i = 0$なる部分点列$(u_{i_1}, \cdots, u_{i_n}, \cdots)$とする。そのとき$\|v\|_\lambda = \|u\|_\lambda$となる。

上のλをΛ型という。条件(b)(c)(d)をみたすλをΛ_0型という。そのとき$\ell_{p,q}$ $(1 \leq p \leq \infty,\ 1 \leq q \leq \infty)$は$\Lambda_0$型となり、$\ell_{p,q}$ $(1 \leq p \leq \infty,\ 1 \leq q \neq \infty)$は$\Lambda$型となる。

オ2節においては$\lambda(E)$について調べる。まず次の定義を述べる：

定義. λをΛ_0型とし、Eをバナッハ空間とする。そのとき$\lambda(E)$を$\|(\|u_i\|)\|_\lambda < \infty$なる$E$の中に値をもつ0−点列$(u_i)$のすべての集合とする。

定義. λをΛ型とし、Eをバナッハ空間とする。そのとき

$\lambda'(Z')$ を $\|(\|u_i\|)\|_{\lambda'} < \infty$ なる Z' の中に値をもつ点列 (u_i) のすべての集合とする。

この定義の下に次の結果が得られる。

定理　λ を $\mathcal{L}$ 型で完備とし，Z をバナッハ空間とする。そのとき $\lambda(Z)$ の双対空間は $\lambda'(Z')$ とノルム同型となる。

第3節においては (Z,λ)-核型写像の概念を与える。そのために次の定義を与えよう。

定義　λ を $\mathcal{L}$ 型とし，E，F，Z をバナッハ空間とする。$T \in L(E,F)$ が (Z,λ)-核型写像（右 (Z,λ)-核型写像）とは $\|(\|A_i\|)\|_\lambda < \infty$，$\sup_{\|v\|\le 1}\|(\|B_i' v\|)\|_{\lambda'} < \infty$ （$\sup_{\|u\|\le 1}\|(\|A_i u\|)\|_{\lambda'} < \infty$，$\|(\|B_i\|)\|_\lambda < \infty$）なる点列 $\{A_i\} \subset L(E,Z)$，$\{B_i\} \subset L(Z,F)$ が存在して任意の $u \in E$ に対して $Tu = \sum_{i=1}^{\infty} B_i A_i u$ と表わせることとする。このとき $N_{Z,\lambda}(E,F)$ で (Z,λ)-核型写像の全体を表わし，$N^{Z,\lambda}(E,F)$ で右 (Z,λ)-核型写像のすべての集合を表わす。それ等の上に次の如き擬ノルムを導入する。

$$\nu_{Z,\lambda}(T) = \inf\left(\|(\|A_i\|)\|_\lambda \cdot \sup_{\|v\|\le 1}\|(\|B_i' v\|)\|_{\lambda'}\right)$$
$$\nu^{Z,\lambda}(T) = \inf\left(\sup_{\|u\|\le 1}\|(\|A_i u\|)\|_{\lambda'} \cdot \|(\|B_i\|)\|_\lambda\right)。$$

$1 \le p \le \infty$，$1 \le q \le \infty$ で $\lambda = l_{p,q}$，Z が1次元ならば (Z,λ)-核型写像（右 (Z,λ)-核型写像）は宮崎氏によって導入された (p,q)-核型写像（右 (p,q)-核型写像）と一致する。また $\lambda = l_p$ のとき (Z,λ)-核型写像は Ceitlin によって導入された

(Z,p)－核型写像と一致する。まず次の結果が得られる。

定理　λをΛ型とし，E，F，Zをバナッハ空間とする。そのとき$T\in N_{Z,\lambda}(E,F)$ならば随伴写像T'は$N^{Z',\lambda}(F',E')$に属し，$\nu^{Z',\lambda}(T')\leq \nu_{Z,\lambda}(T)$となる。さらに$E$，$F$，$Z$が反射的ならば$T'\in N^{Z',\lambda}(F',E')$のとき$T\in N_{Z,\lambda}(E,F)$となり，$\nu^{Z',\lambda}(T')=\nu_{Z,\lambda}(T)$となる。

定理　λをΛ型とし，E，F，G，Zをバナッハ空間とする。そのとき$T\in N_{Z,\lambda}(E,F)$，$S\in L(F,G)$ならば$ST\in N_{Z,\lambda}(E,G)$，$\nu_{Z,\lambda}(ST)\leq \|S\|\,\nu_{Z,\lambda}(T)$となる。また$T\in L(E,F)$，$S\in N_{Z,\lambda}(F,G)$ならば，そのとき$ST\in N_{Z,\lambda}(E,G)$，$\nu_{Z,\lambda}(ST)\leq \nu_{Z,\lambda}(S)\cdot\|T\|$となる。

定理　λをΛ型とし，λをバナッハ空間とする。またE，F，Zをバナッハ空間とするとき$T\in L(E,F)$が(Z,λ)－核型写像であるための必要十分条件は$T=Q_1D_1P_1$：$E\xrightarrow{P_1}\ell_\infty(Z)\xrightarrow{D_1}\lambda(Z)\xrightarrow{Q_1}F$に分解されることである。ここで$P_1\in L(E,\ell_\infty(Z))$かつ$\|P_1\|\leq 1$，$Q_1\in L(\lambda(Z),F)$かつ$\|Q_1\|\leq 1$，また$D_1\in L(\ell_\infty(Z),\lambda(Z))$は$(\rho_i)\in\lambda$が存在して$D_1((a_i))=(\rho_i a_i)$なる写像である。

第4節では(Z,λ)－擬核型写像を導入しそれについて研究する。まず(Z,λ)－擬核型写像の定義を述べると

定義　λをΛ_0型とし，E，F，Zをバナッハ空間とする。

$T \in L(E,F)$ が (Z,λ)−擬核型写像とは $(\|A_i u\|) \in \lambda$, $\|Tu\| \le \|(\|A_i u\|)\|_\lambda$ $(\forall u \in E)$ なる如き点列 $\{A_i\} \subset L(E,Z)$ が存在することである。そのとき $\nu^{\theta}_{Z,\lambda}(T) = \inf \|(\|A_i u\|)\|_\lambda$ で表わし、$N^{\theta}_{Z,\lambda}(E,F)$ によって (Z,λ)−擬核型写像の全体の集合を表わす。

このとき $\lambda = \ell_{p,q}$, Z が1次元ならば (Z,λ)−擬核型写像は宮崎氏の導入した (p,q)−擬核型写像と一致する。また $\lambda = \ell_p$ のとき (Z,λ)−擬核型写像は Ceitlin によって導入された (Z,p)−擬核型写像と一致する。これに対して次の結果が得られる。

定理 λ を Λ 型とし、E, F, Z をバナッハ空間とするとき $N_{Z,\lambda}(E,F) \subset N^{\theta}_{Z,\lambda}(E,F)$, $\nu^{\theta}_{Z,\lambda}(T) \le \nu_{Z,\lambda}(T)$ が成立する。

定理 λ を Λ_0 型とし、E, F, Z をバナッハ空間とするとき $T_k \in N^{\theta}_{Z,\lambda}(E,F)$ $(k=1,\cdots,M)$ ならば $\sum_{k=1}^{M} T_k \in N^{\theta}_{Z,\lambda}(E,F)$, $\nu^{\theta}_{Z,\lambda}(\sum_{k=1}^{M} T_k) \le M\cdot C^{M-1}(\sum_{k=1}^{M} \nu^{\theta}_{Z,\lambda}(T_k))$ となる。

定理 λ を Λ 型とし、E, F, Z をバナッハ空間とする。F が拡張性をもつならば $N^{\theta}_{Z,\lambda}(E,F) \subset N_{Z,\lambda}(E,F)$ となり任意の $T \in N^{\theta}_{Z,\lambda}(E,F)$ に対して $\nu^{\theta}_{Z,\lambda}(T) = \nu_{Z,\lambda}(T)$ が成立する。

第5節では核型空間を Ceitlin によって導入された (Z,ℓ_1)−核型写像を使って Z−核型空間に拡張する。次に定義を与える。

定義 E, F, Z をバナッハ空間として $T \in L(E,F)$ が Z−核型写像とは $\sum_{i=1}^{\infty} \|A_i\| \cdot \|B_i\| < \infty$ の様な点列 $\{A_i\} \subset L(E,Z)$,

$\{B_i\} \subset L(Z, F)$ が存在して $Tu = \sum_{i=1}^{\infty} B_i A_i u$ $(u \in E)$ と表わせることである。

そこでZがl^1ならばZ−核型写像は核型写像と一致する。さらにこの定義を局所凸空間に拡張する。

定義　局所凸空間Eから局所凸空間Fへの線形写像TがZ−核型写像とは、$T(U) \subset B$ および $T_0 \in L(E_U, F_B)$ をもって $T = \psi_B \circ T_0 \circ \varphi_U$ の如くF_Bが完備の様なEの中の絶対凸0−近傍UとFの中の絶対凸有界集合Bが存在して$\hat{E}_U$からF_Bの中へのT_0によって誘導される写像$\hat{T}_0$がZ−核型写像であることである。

このときE, Fをバナッハ空間とすれば、$T: E \to F$がバナッハ空間としてZ−核型写像であるための必要十分条件は、EとFを局所凸空間としてZ−核型写像であることである。そのとき次の結果が得られる。

定理　E, Fを局所凸空間とし、Zをバナッハ空間とする。$T \in L(E, F)$がZ−核型写像であれば、Tは$\hat{T} \in L(\hat{E}, F)$に一意的な拡張をもち$\hat{T}$はZ−核型写像となる。

また次の定義を与える。

定義　Zをバナッハ空間とする。そのとき局所凸空間EがZ−核型空間とは、各絶対凸0−近傍Uに対して$U \supset V$なる絶対凸0−近傍が存在して $\varphi_{U,V}: \hat{E}_V \to \hat{E}_U$ がZ−

核型写像となることである。

そのとき次の結果が得られる。

定理 次のことは同値である：

(a) E は Z－核型空間である。

(b) $\Phi_V : E \to \tilde{E}_V$ が Z－核型写像なる E の 0－近傍 V の基底系が存在する。

(c) E から任意のバナッハ空間 F への任意の連続写像は Z－核型写像である。

参考文献

[1] I. I. Ceĭtlin, A generalization of the Persson–Pietsch classes of operators, Soviet Math. Dokl., 14 (1973), 819–823。

[2] A. Jôichi, (λ, μ)-absolutely summing operators, Hiroshima Math. J., 5 (1975), 395–406。

[3] A. Jôichi, (Z, λ)-nuclear mappings and Z-nuclear spaces, Hiroshima Math. J., 7 (1977), 33–59。

[4] M. Kato, On Lorentz spaces $l_{p,q}\{E\}$, Hiroshima Math. J., 6 (1976), 73–93。

[5] K. Miyazaki, (p,q)-nuclear and (p,q)-integral operators, Hiroshima Math. J., 4 (1974), 99–132。

[6] A. Persson and A. Pietsch, P-nukleare und p-integrale Abbildungen in Banachräumen, Studia Math., 33 (1969), 19–62.

[7] H. H. Schaefer, Topological Vector Spaces, Macmillan, New York, 1966.

[8] F. Treves, Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels, Academic press, New York and London, 1967.